19/12/2016

Εστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φθινουσα και συνεχης
Να δ.ο υπαρχει μοναδικο $\xi \in \mathbb{R}$ ωστε $f(\xi) = \xi$

<u>Αποδειξη</u>

Καταρχην η συναρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -x$ ειναι γνησιως φθινουσα και εφοσον f φθινουσα.

Η $f+g$ θα ειναι γνησιως φθινουσα
Συνεπως υπαρχει το πολυ ενα $\xi \in \mathbb{R}$ ωστε $f(\xi) + g(\xi) = 0$
$\Leftrightarrow f(\xi) = \xi$

Ισχυρισμος $\exists\, b \in \mathbb{R}$. $f(b) - b < 0$

<u>Αποδειξη</u>

$1^{η}$ περιπτωση Αν $f(0) < 0$ θετουμε $b = 0$

$2^{η}$ περιπτωση Αν $f(0) \geq 0$ επιλεγουμε τυχαιο $\beta > f(0)$
Τοτε $\beta > 0 \overset{f \text{ φθινουσα}}{\Longrightarrow} f(\beta) \leq f(0) < \beta$
αρα $f(\beta) - \beta < 0$

Ισχυρισμος $\exists a \in \mathbb{R}$ $f(a) - a > 0$

<u>Αποδειξη</u>

<u>$1^{η}$ περιπ</u> $f(0) > 0$ θεωρουμε $a = 0$
$2^{η}$ περιπ. Αν $f(0) < 0$ επιλεγουμε τυχαιο $a < f(0)$
Τοτε $a < 0 \overset{f \text{ φθιν.}}{\Longrightarrow} f(a) \geq f(0) > a$
$\Rightarrow f(a) - a > 0$

Εφοσον $h(x) = f(x) - x$ ειναι συνεχης
Εφαρμοζοντας Θ. Bolzano στο $[a, \beta]$
$\exists \xi \in (a, \beta)$ ωστε $h(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = \xi$

<u>Θεωρημα (Fermat)</u>

Εστω I διαστημα x_0 εσωτερικο σημειο του I
$f: I \to \mathbb{R}$ συναρτηση

Αν η f παρουσιασει στο x_0 τοπικο ακροτατο και η f ειναι παραγωγισιμη στο x_0 τοτε $f'(x_0) = 0$

<u>Αποδειξη</u>
Εφοσον x_0 εσωτερικο σημειο του I και η f ειναι παραγωγισιμη στο I $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ (1)

Υποθετουμε οτι η f παρουσιασει τοπικο μεγιστο στο x_0
Τοτε $\exists \delta > 0$ ωστε

$f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0)$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \le f(x_0) \\ x < x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) - f(x_0) \le 0 \\ x - x_0 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

Άρα $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow f'_-(x_0) \geq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f'(x_0) \geq 0 \ (2)$

Για κάθε $x \in (x_0, x_0+\delta)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \le f(x_0) \\ x > x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x) - f(x_0) \le 0 \\ x - x_0 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$$

Άρα $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$ δηλ. $f'_+(x_0) \le 0$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} f'(x_0) \le 0 \ (3)$

$(2),(3) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

Αν η f παρουσιάσει στο x_0 τοπ. ελάχιστο τότε η $-f$ παρουσιάσει στο x_0 τοπικό μέγιστο, και αφού x_0 εσ. σημ. του I και η $(-f)$ είναι παραγ. στο x_0 από την πρώτη περ. $(-f)'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

<u>Παρατήρηση</u>

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει

π.χ. η $f(x) = x^3$ είναι παραγ. $f'(x) = 3x^2$

$f'(0)=0$ και η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 0

<u>Παρατήρηση</u> Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ I διάστημα.
Τα πιθανά σημεία τοπικών ακροτάτων της f είναι

α) Τα σημεία στα οποία η f δεν παραγωγίζεται
β) Τα άκρα του διαστήματος I
γ) Τα σημεία x_0 για τα οποία $f'(x_0)=0$.

<u>Παράδειγμα</u>

$f: [-2,4] \to \mathbb{R}$
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$
Να βρεθούν το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f.

<u>Απόδειξη</u>
Η f είναι παραγωγ. με $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$
$= 6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0 \iff x=-1$ ή $x=2$
Πιθανά σημεία ακροτάτων $-2, -1, 2, 4$.

$f(-2) = -16 - 12 + 24 = -4$
$f(-1) = -2 - 3 + 12 = 7$
$f(2) = 16 - 12 - 24 = -20$
$f(4) = 128 - 48 - 48 = 32$.

Άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο 2 με τιμή $f(-2) = -20$ και ολικό μέγιστο στο σημείο 4 με τιμή $f(4) = 32$

Θεωρημα Rolle

Αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ωστε

(ι) f συνεχής στο $[a,b]$

(ιι) f παραγωγίσιμη στο (a,b)

(ιιι) $f(a)=f(b)$.

Τοτε υπαρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f'(x_0)=0$

Αποδειξη

1η περιπτ. Αν f σταθερή $f(x)=c$ $\forall x \in [a,b]$

τοτε για τυχαίο $x_0 \in (a,b)$ ισχυει $f'(x_0)=0$

2η περιπτ. Η f δεν είναι σταθερη.

Τοτε υπάρχει $x_1 \in (a,b)$ ωστε $f(x_1) \neq f(a) = f(b)$

$\boxed{a}$ Αν $f(x_1) > f(a) = f(b)$

Εφοσον $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής υπαρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ (Θεωρημα μέγιστης τιμή για συνάρτηση $f:[a,b] \to \mathbb{R}$)

Τοτε $f(x_0) \geq f(x_1) > f(a) = f(b)$

Αρα $x_0 \neq a$ και $x_0 \neq b$

Απο το Θεωρ. Fermat συμπεραίνουμε οτι $f'(x_0)=0$.

$\boxed{b}$ Αν $f(x_1) < f(a) = f(b)$

Απο το Θεωρ. ελάχιστης τιμής για τη συνεχή $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ υπαρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in [a,b]$

Τοτε $f(x_0) \leq f(x_1) < f(a) = f(b)$.

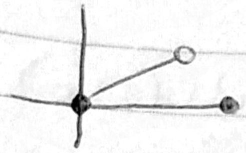
Άρα $x_0 \neq a$ $x_0 \neq b$

Απο Θεώρημα Fermat προκύπτει $f'(x_0)=0$.

Παρατήρηση

Καμία από τις τρεις υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle δεν μπορεί να παραλειφθεί

(i) Υπόθεση συνέχειας $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1) \\ 0, & x=1 \end{cases}$



(ii) Υπόθεση παραγωγισιμότητας $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=|x|$

(iii) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=x$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ώστε

(i) f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

(ii) f παραγωγίσιμη στο (α,β).

Τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_0)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Απόδειξη

Ορίζουμε $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$

με $g(x)=f(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$

g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ g παραγ. στο (α,β)

$g'(x)=f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

$g(\alpha)=f(\alpha)$

$g(\beta)=f(\beta)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\cancel{\beta-\alpha}}\cancel{(\beta-\alpha)}=f(\alpha)$

Από το Θ. Rolle $\exists\, x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $g'(x_0)=0$

και άρα $f'(x_0)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Παραδείγματα

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Η f δεν είναι συνεχής στο 0 (όπως έχουμε δει δεν υπάρχει το όριο της $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ καθώς $x \to 0$)

Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
με $f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

2) $g\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Η g είναι συνεχής στο 0 (αφού $|g(x)| = \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$)

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 0}}{-|x|} \leq g(x) \leq \underset{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 0}}{|x|}$$

Άρα $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$)

Η g είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$g'(x) = 1 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$

Για $x \neq 0$

$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x \cdot \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin\frac{1}{x}$ της οποίας δεν υπάρχει το όριο καθώς $x \to 0$

Άρα η g δεν παραγωγίζεται στο 0

3) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Οπως πριν μπορουμε να δουμε οτι η h ειναι συνεχής στο 0

Η h ειναι παραγωγίσιμη σε καθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
με $h'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

Για $x \neq 0$

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

Αρα $h'(0) = 0$

Ετσι $h'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \\ 0 & , x \neq 0 \end{cases}$

Η h' ειναι συνεχής σε καθε $x \neq 0$
Δειχνουμε οτι δεν υπάρχει το οριο της $h'(x)$ καθως $x \to 0$

Για $x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$ $\quad h'(x_n) = \frac{2}{2n\pi} \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi)$
$= -1 \to -1$

$y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \to 0$ $\quad h'(x_n) = \frac{2}{2n\pi + \pi/2} - 0 \to 0$

4) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $\quad \varphi(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

Η φ συνεχής (όπως πριν)

Για $x \neq 0$ $\quad \varphi'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} + x^3 \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$= 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$$

$$\varphi'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$$

Αρα φ παντου παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \to 0} \varphi'(x) = 0 = \varphi'(0)$.

Αρα η φ' είναι συνεχής στο 0.